Приложение 3. Решение уравнений Максвелла

В проекте применен новый метод решения уравнений Максвелла с магнитными зарядами. Вместе с описанием этого метода позволю себе предварительно кратко изложить предисторию разработки этого метода.

1. О вариационном принципе для электромеханических систем

Для механических систем вариационные принципы общеизвестны. Для частных случаев электрических цепей решение задачи поиск вариационных принципов также известно. Так, для цепей с сопротивлениями решение найдено еще Максвеллом и сравнительно недавно распространено на цепи с диодами и трансформаторами постоянного тока. Для цепей с емкостями и индуктивностями (но без сопротивлений) решение этой задачи также известно. Известны работы с попытками ее решения для электрических цепей общего вида, но доказана их несостоятельность. Эти поиски понятны, так как отсутствие принципа экстремальности для электрических цепей кажется странным.

Автор сформулировал и доказал вариационный принцип оптимума для электромеханических систем произвольной конфигурации, в которых протекают электромагнитные, механические, тепловые, гидравлические и др. процессы. Уравнения Киргоффа являются следствием этого принципа. Показано, что для указанных систем существует пара функционалов с глобальной седловой точкой. Для систем без электрических цепей предложенный принцип эквивалентен принципу минимума действия. Предложен универсальный алгоритм расчета электромеханических систем при любых возмущающих воздействиях. В этом алгоритме реализуется разработанный автором метод поиска глобальной седловой точки одновременно для двух функционалов.

2. О вариационном принципе для уравнений в частных производных

Далее вариационный принцип оптимума для электромеханических систем распространяется на дифференциальные уравнения в частных производных - уравнение Пуассона, уравнение Гельмгольца и другие более общие уравнения. Все эти уравнения решаются методом поиска глобальной седловой точки одновременно для двух функционалов.

3. О вариационном принципе для уравнений Максвелла

Начну издалека, чтобы быть правильно понятым.

Существует интеграл от некоторой функции. Этот интеграл достигает минимума, когда выполняются определенные дифференциальные уравнения. Если эти дифференциальные уравнения описывают дифференциальные законы в некоторой области физики, то в этой области подынтегральную функцию называют лагранжианом, а сам интеграл – действием. Такой подход восходит к Лагранжу, который нашел лагранжиан и действие для механики. Лагранжиан получился очень красивым.

Если мы хотим построить лагранжиан для другой области физики, где известны дифференциальные уравнения - дифференциальные законы, то должны искать функцию, интеграл от которой достигает минимума, когда выполняются эти известные дифференциальные уравнения. Насколько красивым окажется лагранжиан, насколько он будет похож на первоначальный лагранжиан Лагранжа и как его можно интерпретировать - очень интересно, но не это должно определять наш поиск. Это может помочь строить предположения, но сам поиск – задача математическая.

С этой точки зрения вывод уравнений Максвелла из принципа наименьшего действия, который приведен в книге Ландау и Лифшица "Теория поля", параграфы 27-30, кажется неконструктивным. Сначала из всевозможных сопоставлений определяется вид действия. Затем принимается постоянной то одна, то другая функция в этом действии. И при этом (действительно!) получается то одно, то другое уравнение Максвелла. Это демонстрирует глубокий и гибкий ум авторов (в чем я нисколько не сомневаюсь!), но не закрывает пробел в наших знаниях : нет лагранжиана, из которого (как решение вариационной задачи) следуют все 8 уравнений Максвелла, где переменные – напряженности, потенциалы и токи.

Известно также, что уравнения Максвелла выводятся из принципа наименьшего действия. Однако этот вывод делается в предположении, что токи заданы. Но в уравнениях Максвелла плотности токов являются неизвестными. Поэтому, указанный вывод, имея познавательную ценность, не позволяет построить функционал, которым можно воспользоваться для инженерных расчетов.

Этот вопрос особенно важен для уравнений Максвелла с магнитными зарядами при решении вопросов, касающихся описания динамики магнитных зарядов, остаётся невыясненным. Например, в энциклопедической статье о магнитных зарядах утверждается, что главной проблемой в электродинамике с магнитными зарядами является «невозможность введения гамильтоновского или лагранжевого формализма с вариационным принципом, что значительно затрудняет процедуру квантования уравнений движения магнитных зарядов».

Автор нашел такой функционал, у которого первые вариации при обращении в нуль совпадают с уравнениями Максвелла. Затем предлагается метод спуска по этим вариациям, что эквивалентно решению уравнений Максвелла.

4. О вариационном принципе и принципе максимума

Необходимое условие оптимума исходного функционала в вариационном исчислении может быть получено только при том условии, что подынтегральная функция является дифференцируемой и, следовательно, функция не имеет разрывов.

В принципе максимума необходимое условие максимума может быть получено для любой функции.

Автор нашел метод совмещения вариационного принципа (описанного выше) и принципа максимума. При этом удалось распространить условие оптимума функционала на разрывные функции. Поиск оптимума в этом случае основан на градиентном подъеме по некоторой максимизируемой функции.

Этот метод использовался далее для решения уравнений Максвелла в том случае, когда функции распределения плотности зарядов являются ступенчатыми или усеченными функциями Дирака - так мы назовем функцию, которая при нулевом значении аргумента $x = 0$ принимает единичное (а не бесконечное) значение, а в остальных точках при $x \neq 0$ принимает нулевое значение. Будем обозначать эту функцию как $\lambda'(x)$.

5. О решении уравнений Максвелла с усеченными функциями Дирака

Уравнения Максвелла с магнитными зарядами решены для зарядов (магнитных и электрических), изменяющих вдоль некоторой оси координат ox по усеченной функции Дирака $\lambda'(x)$. Основанием для такой постановки задачи является тот факт, и электрические, и магнитные заряды сосредоточены на некоторой поверхности.

Показано, что в этом случае решение имеет ряд особенностей, не отраженных, неотраженных (насколько известно автору) в литературе.

1. Заряды, изменяющиеся по усеченной функции Дирака вдоль оси ox, возбуждают пространственные продольные электромагнитные волны – амплитуда напряженностей E_x и H_x изменяется периодически вдоль той же оси ox.
2. В том случае, если заряды изменяются во времени ($\omega \neq 0$), пространственная продольная электромагнитная волна представляет собой энергозависимую стоячую волну.
3. В том случае, если заряды не изменяются во времени (с некоторой частотой ω), пространственная продольная электромагнитная волна представляет собой статическое поле с переменной в пространстве амплитудой. Для магнитного поля это показано экспериментально
4. В плоскости zoy эти *(*изменяющиеся по усеченной функции Дирака вдоль оси ox*)* заряды создают скачок электрической и магнитной напряженностей в точке $x = 0$.

5. Решение распадается на два независимых решения относительно составляющих электрического и магнитного полей.
6. Отсюда следует, что при условиях этой задачи могут возникать электрические волны при отсутствии магнитных волн и наоборот.
7. В частности, может существовать энергозависимая стоячая магнитная волна. и энергозависимая стоячая электрическая волна.
8. В частности, могут существовать электростатическое и магнитостатическое поля с переменной в пространстве амплитудой.

Все эти особенности используются в проекте.